Κωνίνος Μαπάνου αλύπου λος Μαθηματικός

Τό ραντεβού μας!

Ασκηση της εβδομάδας

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Ασκηση:

Εστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(-1)=\frac{2}{e}$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2u}+(x+1)e^{x+u}+1}-e^{u}\right)=\frac{f'(x)}{2(x+1)},\ x\neq-1$$

α) Να βρείτε τόν τύπο της $f(x)$

β) Να αποδείξετε οτι ή συνάρτηση f ειναι γνήσια αύξουσα στό $\mathbb{R}$ και να βρείτε τό συνολο τιμών της.

γ) Να μελετηθεί ή καμπυλοτητα της f.

δ) Να δείξετε οτι: $f(x)\cdot(x+1)-2ex\leq f(x^2)$ για $x\geq 1$

ε) Να δείξετε ότι: $\int_1^2 \frac{(x^4+1)\cdot e^{x^2}}{e(x+1)}dx>3e-4-2\ln\frac{2}{3}$

CS Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+(x+2)e^{x+4}+1}-e^{4}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+(x+2)e^{x+4}+1-e^{8}}{\sqrt{e^{2x}+(x+1)e^{x+4}+1}+e^{4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4}\left((x-1)e^{x}+\frac{2}{e^{4}}\right)}{e^{4}\left[\sqrt{1+\frac{(x-1)e^{x}}{e^{4}}+\frac{1}{e^{2x}}}+1\right]}=$$

$$=\frac{(x+1)e^{x}}{2}=\frac{f'(x)}{2(x-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=(x+1)^2\cdot e^{x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\int(x+1)^2e^{x}dx+C$$

Τώρα υπολογίζω το $\int(x+1)^2e^{x}dx$:

$$\int(x+1)^2e^{x}dx=\underset{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{(x+1)^2e^{x}-\int 2(x+1)e^{x}dx}$$

$$=(x+1)^2e^{x}-2\left[(x+1)e^{x}-\int e^{x}dx\right]=$$

$$=(x+1)^2e^{x}-2(x+1)e^{x}+2e^{x}$$

$$=e^{x}\left(x^2+2x+1-2x-2+2\right)=e^{x}\left(x^2+1\right)$$

Άρα: $f(x)=e^{x}\cdot(x^2+1)+C$

$$f(-1)=\frac{2}{e}=\frac{1}{e}\cdot 2+C\Leftrightarrow C=0$$

$$f(x)=e^{x}\cdot(x^2+1)$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

β) μονοτονία της f.

$f(x) = e^x(x^2+1)$

$f'(x) = e^x(x^2+1) + 2xe^x = (x+1)^2 \cdot e^x$

$f'(x) \geq 0 \rightsquigarrow f \uparrow / \mathbb{R}$

σύνολο τιμών:

Η f συνεχής/$\mathbb{R}$ και άρα το

$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$f\uparrow$

$\lim_{x\to-\infty}\left[e^x(x^2+1)\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x}} =$ L'Hospital

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} \to 0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x(x^2+1)\right) = +\infty$

άρα το σύνολο τιμών:

$f(A) = (0, +\infty)$.

γ) μελέτη καμπυλότητας.

$f''(x) = 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x = e^x(2x+2+x^2+2x+1)$

$= e^x(x^2+4x+3)$

πιθανή θέση καμπής: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2+4x+3 = 0 \leftarrow \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$		
f'	$+$		$+$		$+$		
f	$\nearrow$		$\nearrow$ τ.μ.		$\nearrow$ τ.κ.		

$f \cup \uparrow / (-\infty, -3]$ (άνω) και παρουσιάζει
$f \cap \downarrow / [-3, -1]$ (κάτω) θέσεις κατ/κής
$f \cup \uparrow / [-1, +\infty)$ (άνω) στα $x_1 = -3$ το $f(-3) = 10 \cdot e^{-3}$
$x_2 = -1$ το $f(-1) = 2 \cdot e^{-1}$

δ) Θέλω να δείξω την ανίσότητα:
$f(x) \cdot (x+1) - 2ex \leq f(x^2)$ η οποία
μετασχηματίζεται:
$x \cdot f(x) + f(x) - \underbrace{2e}_{f(1)} x \leq f(x^2) \Leftrightarrow$

$x \cdot (f(x) - f(1)) \leq f(x^2) - f(x)$

$x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0$ διαιρώ διά $x-1$
διά $x > 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x}$$

υπάρχει πρόταση για εφαρμογή Θ.Μ.Τ.

CS Σαρώθηκε με το CamScanner

$1 < x < x^2$

οπότε $f/[1,x]$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (1,x)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (1)$$

$f/[x,x^2]$ συνεχής/$[x,x^2]$ και παραγωγίσιμη στο (x,x^2)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (x,x^2)$:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x} \quad (2)$$

οπότε:

$1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x^2 \Rightarrow$ $f'\uparrow$ (f κυρτή)

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < \frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}$

το ίδιο ισχύει για $x=1$

ε) Αν $\int_1^2 \frac{(x^2+1)e^{x^2}}{e(x+1)}dx = \int_1^2 \frac{f(x^2)}{e(x+1)}dx$

που δεν προκαλούμενη ανισότητα:

$f(x^2) \geq f(x)(x+2) - 2e^x \Leftrightarrow$

$\frac{f(x^2)}{e(x+1)} \geq \frac{f(x)}{e} - \frac{2^x}{\quad} \Leftrightarrow$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\int_1^2 \frac{f(x^2)}{e(x+1)}\,dx > \underbrace{\int_1^2 \left(\frac{1}{e}\cdot f(x) - \frac{2x}{x+1}\right)dx}$$

Υπολογίζω τό $\frac{1}{e}\int_1^2 f(x)\,dx - \int_1^2 \frac{2x}{x+1}\,dx$

* $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2+1)e^x\,dx =$ παραγοντ. ολοκλήρωση

$$\left[e^x\cdot(x^2+1)\right]_1^2 - \int_1^2 2xe^x\,dx =$$

$$= \left[e^x(x^2+1)\right]_1^2 - \left[\left[2xe^x\right]_1^2 - \int_1^2 2e^x\,dx\right]$$

$$= e^2(4+1) - e\cdot 2 - 4e^2 + 2e + 2(e^2 - e)$$

$$= 5e^2 - \cancel{2e} - 4e^2 + \cancel{2e} + 2e^2 - 2e$$

$$= \boxed{3e^2 - 2e}$$

$$\frac{1}{e}\cdot\int_1^2 f(x)\,dx = \boxed{3e - 2}$$

$$\int_1^2 \frac{2x}{x+1}\,dx = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{x+1}\right)dx =$$

$$\begin{array}{r|l} 2x & x+1 \\ \hline 2x-2 & 2 \\ -2 & \end{array}$$

$$= \left[2x - 2\ln(x+1)\right]_1^2 =$$

$$= \boxed{4 - 2\ln 3 - 2 + 2\ln 2}$$

οπότε:

$$\int_1^2 \frac{f(x^2)}{e(x+1)}\,dx > 3e - \cancel{2} - 4 + 2\ln 3 + \cancel{2} - 2\ln 2$$

$$= \underbrace{3e - 4 - 2\left(\ln\frac{2}{3}\right)}$$

CS Σαρώθηκε με το CamScanner