

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΝΔΟΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΙΟΥΛΙΟΥ 2024  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε αριθμό τη λέξη Σωστό, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη Λάθος, για τη λανθασμένη.

**α.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**β.** Αν για τις συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντα  $f \circ g = g \circ f$ .

**γ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει πάντοτε ακριβώς μια λύση.

**δ.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $x'x$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- ε. Αν μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει  $f(x) > f(x+1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ae^{-x} - 1$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $M(1,1)$ .

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $a$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 5**

**B3.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 8**

**B4.** Να βρείτε τα  $x$ , για τα οποία η  $C_{f^{-1}}$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \ln(1+e^x)$  και  $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να δείξετε ότι η  $g$  είναι περιττή.

**Μονάδες 5**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ3. Δίνεται επιπλέον συνάρτηση  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια, ώστε να ισχύει  $h \circ f = g$ . Να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 8**

Γ4. Αν  $h(x) = 1 - 2e^{-x}$ , τότε να αποδείξετε ότι  $h(e^x) + h(e^{2x}) < h(e^{3x}) + h(e^{4x})$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει:

- $(f \circ f)(x) = x + f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(g(x) - e^x - x + 1) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι  $1-1$ .

**Μονάδες 5**

Δ2. Να βρείτε τη συνάρτηση  $g$ .

**Μονάδες 7**

Αν  $g(x) = e^x + x - 1$ , τότε:

Δ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h(x) = \ln(g(x))$ .

**Μονάδες 7**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $g^{-1}(e^{x^2+1} + x^2) = 2$ .

**Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΟΔΗΓΙΕΣ** (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μια (1) ώρα και δεκαπέντε (15) λεπτά μετά τη διανομή των θεμάτων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**