

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΝΔΟΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

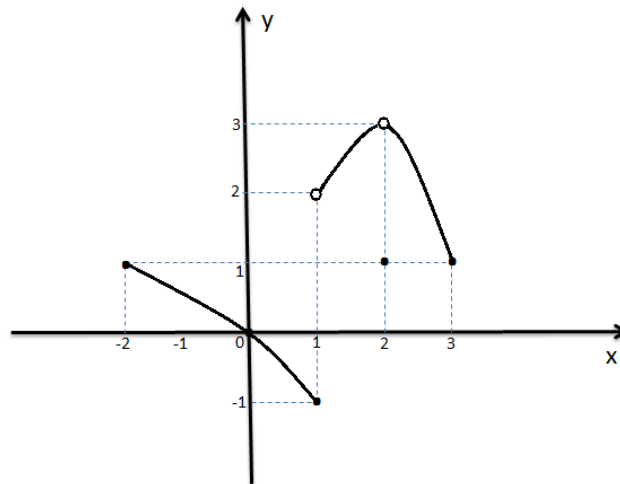
ΚΥΡΙΑΚΗ 05 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α:

A1. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



i. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x + 1) =$

iii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) =$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} f(-x) =$

v. $\lim_{x \rightarrow 3} f(3x - 7) =$

Μονάδες 5

A2. Είναι η συνάρτηση f του A1. ερωτήματος, συνεχής στο $[-2, 1]$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

A3. Να διατυπωθεί το θεώρημα Bolzano και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

A4. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη Σωστό, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη Λάθος, για τη λανθασμένη.

i. Αν μία συνάρτηση είναι $1 - 1$, σε διάστημα A του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο A .

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

iii. Αν $f(x) < g(x)$ και υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε θα ισχύει πάντα ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

iv. Αν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν, τότε δεν υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$.

v. Αν η f είναι συνεχής στο (α, β) και τα $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ είναι ετερόσημα (πεπερασμένα ή άπειρα), τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια στο $x_0=1$. **Μονάδες 3**

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6+5

B3. Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες 6

B4. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της αντίστροφής της, στο ίδιο γράφημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι ιδιότητες:

$$xf(x) \leq \eta\mu(2x), \quad (1) \quad \text{και} \quad g^3(x) + g(x) = x^3, \quad (2), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Αν η f είναι συνεχής στο μηδέν, να δείξετε ότι $f(0)=2$.

Μονάδες 8

Γ2. Να δείξετε ότι $-|x^3| \leq g(x) \leq |x^3|$ και ότι η g είναι συνεχής στο μηδέν.

Μονάδες 6

Γ3. Για $x > 0$ να δείξετε ότι $g(x) > 0$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο \mathbb{R} και $f(2) < g(2)$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συναρτήσεις f, g , με τύπους $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ και $g(x) = x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x-1) + 5$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(-x) + g(x) = 0$ και ότι η συνάρτηση g είναι «1-1».

Μονάδες 2+2

Δ3. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha + 3 = 0 \quad \text{και} \quad \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta - 9 = 0,$$

i. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$

Μονάδες 7

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \beta$

Μονάδες 5

iii. Να αποδείξετε ότι $\alpha \in (-1, 0)$ και $\beta \in (2, 3)$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μια (1) ώρα και δεκαπέντε (15) λεπτά μετά τη διανομή των θεμάτων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ