

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΝΔΟΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f , με $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Μονάδες 5

A2. Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος ή απλά παράγωγος της f ;

Μονάδες 3

A3. Πώς ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και ποια είναι η εξίσωση της;

Μονάδες 3

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της».

i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδα 1

ii. Αν η πρόταση είναι αληθής (Α) να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής (Ψ) να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 3

A5. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη Σωστό ή τη λέξη Λάθος.

i. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\sin x)' = \eta \mu x$.

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0 .

iv. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ν. Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$, με $a \neq 0$ για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- $P''(2021) = 4$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} = \beta$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{P(x)}{2x^2 + 12} \right) = \gamma + 2$

B1. Να αποδείξετε ότι το $P(x) = 2x^2 + x - 1$.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{P(x)}{x}} \cdot \right)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{P(x)} - \sqrt{2x} \right)$$

Μονάδες 8

B3. Αν $g(x) = \ln \left(\frac{P(e^x)}{2e^x - 1} \right)$, $x > 0$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln(e^x + 1)$, $x > 0$

Μονάδες 5

β) να βρείτε τη g^{-1}

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty)$ ισχύουν τα εξής:

$$f(x) \cdot (f(x) - 2\ln x) = x^2 - \ln^2 x \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Γ1. α) Να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 6

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(\epsilon\phi x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ στο $(0, \pi/2)$.

Μονάδες 5

Γ2. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_0 = 1$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h^2) - 2f(1) + f(1-2h^2)}{h^2}$

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε :

$$f(x_0) = 3 + \frac{\ln 2 + \ln 3 + \ln 4}{3}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

όπου $g: [0, +\infty)$ με $g(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x \cdot e^{tx} + x^3}{e^{tx} + 1}$ για $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^3$ και να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 8

Δ2. α. Να βρείτε την εφαπτομένη της $f(x)$ στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 3

β. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με τον $x'x$.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Μονάδες 5

- Δ3.** Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon_1) : y = \frac{1}{\gamma}x - 2\ln\gamma$ με $\gamma > 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε_1) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 9

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ