

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΝΔΟΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt[n]{\alpha} \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$ όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 6

A2. Έστω η εξίσωση $x^n = a$ (I) με $a \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις.

A	B
Αν $a > 0$ και n περιττός τότε η (I)	Έχει ακριβώς μία λύση, την $-\sqrt[n]{ a }$
Αν $a > 0$ και n άρτιος τότε η (I)	Έχει ακριβώς μία λύση, την $\sqrt[n]{a}$
Αν $a < 0$ και n περιττός τότε η (I)	Έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$

Μονάδες 9

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε $|a| \geq a$ και $|a| \leq -a$.

β. Ισχύει ότι $d(a,b) = |b-a|$.

γ. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$.

δ. Η ισότητα $|x| = x$ ισχύει μόνο για $x > 0$.

ε. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ έχει ακριβώς μία λύση όταν $\alpha \neq 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y με την ιδιότητα $2 < x < 5$ και $3 < y < 6$.

B1. Να γράψετε τις παραστάσεις $A = |x-2| - |x-6|$ και $B = |y-6| - |3-y|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Μονάδες 9

B2. Αν $A = 2x - 8$ και $B = -2y + 9$ να δείξετε ότι $-7 < A + B < 5$

Μονάδες 10

B3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$\Gamma = \frac{\sqrt{4 - 4x + x^2}}{x - 2} + \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x|}{x}$$

είναι ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2 x - 2(2x - 1) = 2(\lambda - 1)^2$ **(1)**, όπου λ πραγματικός αριθμός.

Γ1.

i. Να δείξετε με κατάλληλες πράξεις ότι η εξίσωση **(1)** γράφεται στη μορφή $(\lambda - 2)(\lambda + 2)x = 2\lambda(\lambda - 2)$

Μονάδες 6

ii. Να βρεθεί για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση **(1)** είναι αόριστη.

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε την θετική λύση κ της εξίσωσης

$$(\kappa - 1)^2 = \sqrt{81} \cdot \sqrt{\sqrt{86} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{86} + \sqrt{5}}$$

Μονάδες 6

Γ3. Αν $\kappa = 4$ και ισχύει η σχέση $(\alpha - \kappa)(\kappa - \beta) > 0$ να δείξετε ότι το κ είναι μεταξύ των α και β .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{1}{4 + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4 - 2\sqrt{3}}$$

και η ισότητα

$$\beta^2 - 6\beta + 9 + \gamma^2 - 8\gamma + 16 = 0$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ

Μονάδες 9

Δ2. Αν $\alpha=2, \beta=3, \gamma=4$ να λυθεί η εξίσωση

$$\alpha - \frac{x^2 + 7x}{x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{\beta}{1 - \gamma}$$

Μονάδες 9

Δ3. Αν

$$\kappa = \frac{(x - 1)^2 - \gamma|x - 1| + \gamma}{|x - 1| - 2}$$

Τότε να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση κ και στην συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μια (1) ώρα και δεκαπέντε (15) λεπτά μετά τη διανομή των θεμάτων.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**