

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ  
ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ  
ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές Σ ή λαθος Λ.

i) Αν η συνάρτηση  $f^2$  είναι συνεχής στο  $\chi_0$  τότε και η  $f$  είναι συνεχής στο  $\chi_0$  Σ Λ

ii) Αν η  $f$  συνεχής στο  $[-3,2]$  και  $f(-3)=0$  και  $f(2)=4$  τότε υπάρχει  $\chi_0 \in (-3,2)$  ώστε  $f(\chi_0)=\ln 2$  Σ Λ

iii) Αν η  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$  τότε δεν υπάρχει  $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f(\chi_0)=0$  Σ Λ

iv) Αν η  $f$  συνεχής στο  $[-1,4]$  και  $f(-1)=2$  και  $f(4)=3$  τότε  $f([-1,4]) \subset [2,3]$  Σ Λ

v) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστο ρίζα πραγματική Σ Λ

B) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)=\sqrt{x}$  και  $g(x)=x^3$  ορισμένες στο  $[0,+\infty)$ .

i) Να βρεθεί ο τύπος της συναρτήσεως που δίνει την κατακορυφή αποσταση των δυο καμπυλών  $f, g$  στο διαστημα  $[0,1]$ .

ii) Να δειχθεί ότι υπάρχει  $\chi_0 \in (0,1)$  ώστε η κατακορυφή αποσταση να γίνεται μέγιστη.

ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Εστω συναρτηση  $f$  η οποια είναι συνεχης και γνησια μονοτονη στο  $[1,2]$  με  $f(1)=-1$  και  $f(2)=1$ . Θεωρουμε τα σημεια του επιπεδου:  $A(\chi, \psi)$  και  $B(\chi, \psi-2)$  ωστε  $:(OB)=(OA)$

i) Να βρεθει ο γεωμετρικος τοπος των σημειων  $A$ , του επιπεδου.

ii) Να δειχθει οτι υπαρχει ακριβως μια τιμη του  $\chi$ , ωστε η παρασταση:  $K=2 \cdot \chi \cdot \psi + \frac{\psi}{\chi^2 + \psi^2}$  να μη δεινιζεται .

iii) Να δειχθει οτι :  $-1 \leq f(\chi^2 + \psi^2) \leq 1$  για  $\chi \in [0,1]$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Εστω συναρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιει τη σχεση:  $f^5(x) + f(x) = (x^2 + \sin^2 \chi - 1)^5$ ,  $\chi \in \mathbb{R}$ .

i) Να δειξετε οτι:  $0 \leq f(x) \leq x^2 - \eta \mu^2 \chi$

ii) Να δειξετε οτι η  $f$  είναι συνεχης στο  $\chi_0=0$

iii) Να βρειτε το  $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu^2 \chi}$

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

A) Δινεται η συναρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ωστε  $: f^3(x) + f(x) = x^3 + x + 1$

i) Να δειξετε οτι η  $f$  είναι γνησια αυξουσα.

ii) Να δειξετε οτι η  $f$  είναι συνεχης στο  $\mathbb{R}$ .

iii) Αν  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , αφου δειξετε οτι η  $f^{-1}$  είναι συνεχης στο  $\mathbb{R}$  να βρειτε το  $\lim_{\chi \rightarrow 0} f^{-1}(\chi)$

B) Για την συναρτηση  $f$  ισχυει οτι:  $f^3(x) + f(x) = 64 \cdot x^3$ ,  $\chi \in \mathbb{R}$ .

i) Να δειξετε οτι η  $f$  είναι γνησια αυξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ii) Να διαταχθούν σε σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο οι αριθμοί:  $f(\ln 2), f(f(-2)), f(e), f(1)$ .

iii) Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$  και να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

iv) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0=0$