

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

1. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
2. Να συμπληρώσετε τα κενά
 - i. ο κύκλος είναι ένας, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σημείο.
 - ii. Αν, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο
 - iii. η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) από τις πλευρές της γωνίας
 - iv. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
 - v. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα
 - vi. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι μεταξύ τους.
 - vii. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η πλευρά του τριγώνου
 - viii. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι από το άθροισμα των δύο άλλων και από τη διαφορά τους
 - ix. Αν, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο

Θέμα 2ο

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε τη ΒΑ κατά τμήμα ΑΔ και τη ΓΑ κατά τμήμα ΑΕ. Να αποδείξετε ότι
$$ΒΔ+ΓΕ > ΒΓ +ΔΕ$$
2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $ΑΒ < ΑΓ$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Δ να αποδείξετε ότι $ΔΒ < ΔΓ$
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές
 - α. $α = 4, β = 6, γ = 8$
 - β. $α = 3, β = 10, γ = 6$

4. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με μεγαλύτερη πλευρά τη $B\Gamma$ και τυχαία Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι
- $BE > AB$ και $\Gamma\Delta > A\Gamma$
 - $BE + \Gamma\Delta > B\Delta + \Delta E + E\Gamma$

Θέμα 3ο

- Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90$), η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει τη πλευρά AB στο σημείο Δ . Απο το Δ φέρουμε προς τη πλευρά $B\Gamma$ τη κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι
 - $A\Delta = \Delta E$
 - $A\Delta < \Delta B$
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών B εξωτερική και Γ εξωτερική τέμνονται στο Δ , να αποδείξετε ότι
 - το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές
 - η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετη του τμήματος $B\Gamma$
 - αν M το μέσο του $B\Gamma$, τότε $BM < M\Delta$

Θέμα 4ο

- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $A\Delta = \Delta E$.
Να αποδείξετε ότι
 - $AB = \Gamma E$
 - $A\Delta < (AB + A\Gamma)/2$
- Θεωρούμε τα σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς τη ευθεία ϵ , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην ϵ . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ϵ
 - Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία ϵ στο σημείο O , να αποδείξετε ότι
 - η ευθεία ϵ διχοτομεί τη γωνία $A'OA$
 - Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ευθεία ϵ .
 - Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ϵ , να αποδείξετε ότι
 - $KA = KA'$
 - $KA + KB > OA + OB$