

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ Ε Μ Α 1^ο

A) Αν ισχύει ότι: $f(x)^5 + x^4 \cdot f(x)^3 = 2x^5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ .

B) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x \cdot \sin x} \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}$ αν $\alpha > 0$

Γ) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Θ Ε Μ Α 2^ο

A) Εστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τη συνάρτηση $f \circ g$, να είναι 1-1.

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

B) Εστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$ για την οποία ισχύει: $4 \cdot x^2 + f^2(x) = 4$, για κάθε $x \in [-1, 1]$

i) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

ii) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό το πρόσημο της στο $(-1, 1)$

iii) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f ?

iv) Αν $f(0) = 2$ να βρείτε την f .

Θ Ε Μ Α 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $e^x - e^x \cdot e^{g(x)} = e^{g(x)}$

i) Να βρείτε τον τύπο της g .

Αν $g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$, τότε

ii) Να δείξετε ότι η g είναι γνησια αυξουσα και ότι αντιστρέφεται.

iii) Να δείξετε ότι η C_g βρίσκεται κατω από την $\psi = \chi$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

iv) Να βρείτε τα ορια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{g(x)} \cdot \eta\mu g(x) + g(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{g(x)} \right)$

Θ Ε Μ Α 4^ο

Δίνεται η συναρτηση: $f(x) = x^5 + x^3 - 1$

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

ii) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησια αυξουσα.

iii) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχης στο $\chi_0 = 1$

iv) Αν είναι γνωστο ότι η f^{-1} είναι συνεχης τότε να βρείτε τα ορια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[5]{x}}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(f^{-1}(x))^5 + (f^{-1}(x))^3 + 2}$

Θ Ε Μ Α 5^ο

Δίνεται μια συναρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^3(x) + 2 \cdot f(x) = x$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησια αυξουσα.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχης στο \mathbb{R} .

iii) Να αιτιολογησετε ότι υπαρχει η αντιστροφη της και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

iv) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

v) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(f^{-1}(x))}{x}$ και το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(\eta\mu x)}{x}$